نظرية الرواســـب وحساب التكاملات

1 راسب تابع:

ليكن التابع $f(z)$ تابعاً وحيد التعيين وتحليلياً ضمن وعلى محيط الدائرة C باستثناء النقطة الشاذة z_o وبفرض أن هذه النقطة هي مركز الدائرة C بالتالي يمكن نشر التابع $f(z)$ على شكل سلسلة لوران حول النقطة الشاذة z_o أي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_o)^n}$$

فإذا كانت النقطة $z = z_o$ قطباً من الدرجة k فإن سلسلة لوران للتابع $f(z)$ من الشكل:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_o)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_o)^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{(z - z_o)^k}$$

أما إذا كانت النقطة $z = z_o$ نقطة شاذة أساسية فإن سلسلة لوران للتابع $f(z)$ من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_o)^n}$$

نسمي a_{-1} في سلسلة لوران باقي أو راسب التابع $f(z)$ عند النقطة الشاذة الأساسية أو القطب $z = z_o$ ويرمز له $Res[f(z): z_o]$ أي :

$$Res[f(z): z_o] = a_{-1}$$

أي أن الراسب هو أمثال الحد الأول من الدرجة الأولى من الجزء الرئيسي.

مثال(1): بين نوع النقطة الشاذة واوجد الراسب فيما يلي:

$$f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^4}$$

الحل:

$$f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[\left(1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= \underbrace{\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z}}_{\text{رئيسي}} + \underbrace{\frac{2}{3} + \cdots}_{\text{تحليلي}}$$

ومنه النقطة $z = 0$ نقطة شاذة نوعها قطب من الدرجة الثالثة

والراسب هو $a_{-1}=\frac{4}{3}$

مثال(2): بين نوع النقطة الشاذة واوجد الراسب للتابع:

$$f(z)=\frac{e^{2z}-1}{z-1}$$

الحل:

النقطة الشاذة هي $z=1$

نفرض $u=z-1$ ومنه $z=u+1$

$$\frac{e^{2z}-1}{z-1}=\frac{e^{2u}.e^{2}-1}{u}=\frac{1}{u}\left[e^{2}\left(1+2u+\frac{(2u)^{2}}{2!}+\frac{(2u)^{3}}{3!}+\cdots\right)-1\right]$$
$$=\left(\frac{e^{2}-1}{u}\right)+2e^{2}+2e^{2}u+\frac{4}{3}e^{2}u^{2}+\cdots$$

ومنه: $u=0$ قطب بسيط بالتالي $z=u+1=1$ قطب بسيط

والراسب هو: $a_{-1}=e^{2}-1$

2 طرق حساب الراسب:

اعتماداً على سلسلة لوران ومن تعريف راسب تابع في نقطة يمكن تمييز بعض الطرق لحساب راسب التابع $f(z)$ عند النقطة الشاذة z_0:

أولاً: $z=z_0$ نقطة شاذة قطب بسيط للتابع، عندئذ الراسب يحسب:

$$\boldsymbol{Res[f(z):z_0]=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

إذا كان التابع $f(z)$ تابعاً كسرياً من الشكل $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ حيث أن كل من $p(z),q(z)$ تابعاً تحليلياً في النقطة $z=z_0$ وكان $p(z_0)\neq 0\,,q(z_0)=0\,,\dot{q}(z_0)\neq 0$:

$$Res[f(z):z_o]=\frac{p(z_0)}{\dot{q}(z_0)}$$

ثانياً: إذا كان التابع $f(z)$ قطب من المرتبة n في النقطة $z=z_0$ فإن الراسب لهذا التابع في ذلك القطب يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{Res[f(z):z_o]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^{n}f(z)]}$$
$$\boldsymbol{=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}[(z-z_0)^{n}f(z)]^{(n-1)}}$$

مثال(3): احسب الراسب فيما يلي:

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^{2}}$$

الحل:

النقطة $z=1$ نقطة شاذة قطب بسيط(أثبت ذلك)،

النقطة $z=-1$ نقطة شاذة قطب مضاعف(أثبت ذلك)،

$$Res[f(z):1]=a_{-1}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}Res[f(z):-1]&=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]=\lim_{z\to -1}-\frac{1}{(z-1)^2}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

مثال(4): احسب راسب التابع:

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^2}$$

الحل:

النقطة $z=-1$ نقطة شاذة قطب مضاعف،

$$\begin{aligned}Res[f(z):-1]&=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{\sin 2z}{(z+1)^2}\right]=\lim_{z\to -1}2\cos 2z=2\cos 2\end{aligned}$$

<u>ملاحظة:</u> إذا كان $z_0=\alpha+i\beta$ و $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ قطبين للتابع $f(z)$ فإن:

$$Res[f(z):\overline{z_0}]=\overline{Res[f(z):z_0]}$$

مثال(5): أوجد رواسب التابع:

$$f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

الحل:

عند $z=-1$ قطب مضاعف من المرتبة الثانية،

$$\begin{aligned}Res[f(z):-1]&=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{(2z-2)(z^2+4)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}=-\frac{14}{25}\end{aligned}$$

عند $z=2i$ قطب بسيط،

$$Res[f(z):2i] = a_{-1} = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}$$
$$= \lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25}$$

عند $z=-2i$ قطب بسيط،

$$Res[f(z):-2i] = a_{-1} = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}$$
$$= \lim_{z\to -2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

ثالثاً: إذا كان $p(z)$ و $q(z)$ تابعين تحليليين في النقطة $z=z_0$ حيث $p(z_0)\neq 0$ و $q(z)$ له صفر من المرتبة الثانية في النقطة $z=z_0$. فإن للتابع:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

قطب في النقطة $z=z_0$ من المرتبة الثانية والراسب لهذا التابع في هذا القطب يساوي:

$$\boldsymbol{Res[f(z):z_o] = \frac{6\grave{p}\grave{\grave{q}} - 2\grave{\grave{\grave{q}}}p}{3(\grave{\grave{q}})^2}}$$

حيث $\grave{p}, \grave{\grave{q}}, \grave{\grave{\grave{q}}}$ هي مشتقات التوابع p,q في النقطة $z=z_0$.

رابعاً: إذا كانت النقطة $z=z_0$ نقطة شاذة أساسية فإن الراسب في تلك النقطة يمكن حسابه من منشور هذا التابع حسب سلسلة لوران حول تلك النقطة.

مثال(6): احسب راسب التابع $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$ في النقطة $z=0$

الحل:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} - \frac{1}{3!\,z^3}$$

وراسب التابع في النقطة $z=0$ هو أمثال $\frac{1}{z}$ ويساوي (1-).

خامساً: إذا كانت النقطة $z=z_0$ نقطة شاذة قابلة للحذف، أي أن $n\geq 1$، $a_{-n}=0$ فإن راسب التابع $f(z)$ في النقطة z_0 يساوي الصفر:

$$\boldsymbol{Res[f(z):z_o] = 0}$$

3 نظـرية الرواســـب:

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً ووحيد التعيين داخل وعلى المنحني المغلق البسيط C، حيث يوجد عدد محدود من النقاط الشاذة الواقعة داخل المنحني C نرمز لها: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ فإن:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}(a_{-1})_j = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}Res[f(z):z_j]$$

مثال(7): احسب التكامل

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-i\pi)^4}dz$$

حيث $C:|z|=4$

الحل:

للتابع قطبان الأول $z=0$ من المرتبة الثانية، والثاني $z=i\pi$ من المرتبة الرابعة وكل منهما واقع ضمن الدائرة $C:|z|=4$:

$$Res[f(z):0]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z-i\pi)^4}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-i\pi-4)}{(z-i\pi)^5}=\frac{\pi-4i}{\pi^5}$$

$$Res[f(z):i\pi]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$=\lim_{z\to i\pi}\frac{1}{(4-1)!}\frac{d_3}{dz^3}\left[(z-i\pi)^4\frac{e^z}{z^2(z-i\pi)^4}\right]=\frac{1}{6}\lim_{z\to i\pi}\frac{d_3}{dz^3}\left[\frac{e^z}{z^2}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to i\pi}\frac{e^z(z^3-6z^2+18z-24)}{z^5}=\frac{\pi^3+6\pi^2 i-18\pi-24i}{6\pi^5}$$

ومنه قيمة التكامل:

$$I=\int_{|z|=4}\frac{e^z}{z^2(z-i\pi)^4}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{2}Res\left[f(z):z_j\right]$$

$$=2\pi i\left(\frac{\pi-4i}{\pi^5}+\frac{\pi^3+6\pi^2 i-18\pi-24i}{6\pi^5}\right)$$

$$=\frac{-6\pi^2+48+i(\pi^3-12\pi)}{3\pi^4}$$

مثال(8) احسب قيمة التكامل

$$I=\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$$

1) من أجل $C:|z|=\frac{3}{2}$

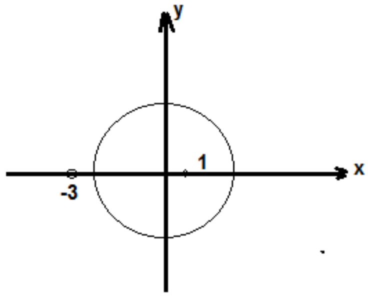
2) من أجل $C:|z|=10$

الحل:

النقاط الشاذة:

$z=1$ قطب بسيط ، و $z=-3$ قطب مضاعف

1) من أجل $C:|z|=\frac{3}{2}$

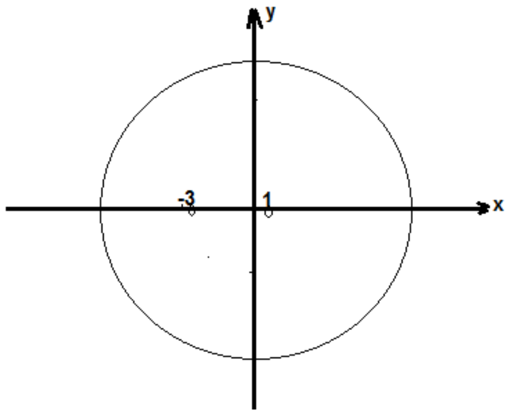


القطب $z = 1$ يقع داخل $C: |z| = \frac{3}{2}$ بينما القطب $z = -3$ يقع خارجها

$$Res[f(z):1] = a_{-1} = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \lim_{z \to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16}$$

$$I = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) = \frac{\pi i e}{8}$$

2) من أجل $C: |z| = 10$



كلا القطبين يقعان داخل $C: |z| = 10$

$$Res[f(z):-3] = \lim_{z \to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d_{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$
$$= \lim_{z \to -3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right] = \lim_{z \to -3}\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}$$
$$= -\frac{5e^{-3}}{16}$$

ومنه:

$$I = \oint_{|z|=10} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i\left(\frac{e}{16} + \left(-\frac{5e^{-3}}{16}\right)\right) = \frac{\pi i(e^4-5)}{8e^3}$$

مثال(9) احسب قيمة التكامل

$$I = \oint_C \frac{dz}{2z^2 - 9z + 4}$$

حيث: $C: |z| = 1$

الحل:

نكتب التكامل بالشكل التالي:

$$I=\frac{1}{2}\oint_{C}\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-4)}$$

للتابع راسبين $z=4$ قطب بسيط يقع خارج الدائرة $C:|z|=1$، والثاني $z=\frac{1}{2}$ قطب بسيط يقع داخل الدائرة $C:|z|=1$.

$$Res\left[f(z):\frac{1}{2}\right]=a_{-1}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-4)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{(z-4)}=-\frac{2}{7}$$

$$I=\frac{1}{2}\oint_{C}\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-4)}=\frac{1}{2}\times 2\pi i\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{-2\pi i}{7}$$

مثال(10) أوجد راسب التابع:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2-2z}$$

الحل:

للتابع قطبين بسيطين $z=0\,,z=2$

$$Res[f(z):0]=a_{-1}=\lim_{z\to 0}z\frac{z+1}{z(z-2)}=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z-2)}=-\frac{1}{2}$$

أو بطريقة ثانية:

$$Res[f(z):0]=\lim_{z\to 0}\frac{p(z)}{\dot{q}(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{2z-2}=-\frac{1}{2}$$

$$Res[f(z):2]=a_{-1}=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z+1}{z(z-2)}=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}$$

مثال(11): احسب تكامل التابع:

$$I=\oint_{|z+1|=3}\frac{e^{2iz}-5z}{z+2i}dz$$

الحل:

للتابع قطب بسيط $z=-2i$ وواقع داخل الدائرة $|z+1|=3$:

$$Res[f(z):-2i]=a_{-1}=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{e^{2iz}-5z}{z+2i}=\lim_{z\to -2i}\left(e^{2iz}-5z\right)=e^4+10i$$

$$I=\oint_{|z+1|=3}\frac{e^{2iz}-5z}{z+2i}dz=2\pi i(e^4+10i)$$